Centre de Ressources
Comptabilité Finance
Lycée MARIE CURIE
Avenue du 8 mai 1945 - BP 348
38435 ECHIROLLES cedex
http://crcf.ac-grenoble.fr/

3.2. LES OUTILS ET PROCÉDURES DE LA GESTION BUDGÉTAIRE
Les outils de construction de budgets dans le domaine des approvisionnements

Ce que dit le programme de l'UE 11 :

3.2. Les outils et procédures de la gestion budgétaire

Compétences attendues	Savoirs associés
- Déterminer le programme optimal d'approvisionnement en avenir certain et le stock optimal en avenir aléatoire. - Concevoir un budget des approvisionnements en tenant compte des solutions d'approvisionnement.	- Les outils de construction de budgets dans les domaines - des approvisionnements : modèles de gestion des stocks en avenir certain, modèles en avenir aléatoire, budgétisation des approvisionnements, implications du juste-à-temps

Cadrage

En ce qui concerne les méthodes de gestion des approvisionnements :

- le candidat doit savoir déterminer le programme optimal d'approvisionnement en avenir certain avec le modèle de Wilson et ses adaptations : prise en compte d'un stock de sécurité ou de tarifs dégressifs ;
- l'étude du modèle de Wilson se fera à l'aide d'une fonction à dériver et non uniquement par une formule ;
- dans un contexte aléatoire, la gestion des approvisionnements sera limitée au cas d'une demande avec période économique de réapprovisionnement fixée. L'étude pourra être complétée par le calcul de probabilité(s) de rupture de stock ;
- seuls les principes généraux de la méthode kanban seront abordés.

Introduction

Dans le cadre du processus budgétaire et eu égard à vos objectifs stratégiques, vous avez déterminé vos prévisions de vente compatibles avec votre marché et vos capacités de production.

Vous avez par ailleurs défini votre plan de production, en utilisant si nécessaire un logiciel de gestion de production. Ce plan de production vous permet de déterminer vos besoins en approvisionnement.

Nous pouvons retenir trois critères essentiels qui vont guider la politique d'approvisionnement de l'entreprise :

- **La sécurité** des approvisionnements (liée aux délais de livraison et aux différentes sources d'approvisionnement) ;
- **Le coût** de gestion des approvisionnements (dont le coût de gestion des stocks) ;
- **La qualité**.

C'est le triptyque traditionnel de la gestion (coût, qualité, délai).

À ce titre citons Henri BOUQUIN (Le contrôle de gestion PUF 9e éditions) qui précise :

« L'important, en matière de gestion budgétaire est :

- de s'assurer de la conformité entre la politique retenue et les facteurs clés du succès (FCS).
- Gérer les stocks à partir d'une optimisation qui négligerait les risques de rupture pour minimiser leur coût serait incohérent si les FCS font ressortir la variable délai de livraison.

[…] »

(cc) BY-NC-SA Réseau CRCF - Ministère de l'Éducation nationale - http://crcf.ac-grenoble.fr

Il existe de nombreux modèles permettant d'obtenir le programme optimal d'approvisionnement (généralement connus sous le terme « modèle d'optimisation des stocks »), il s'agit à travers ce qui suit d'en découvrir quelques-uns.

Toutefois est-il bien nécessaire de passer du temps sur la gestion des approvisionnements dont l'impact sur les coûts est faible pour l'entreprise ?

En pratique, les modèles d'optimisation sont appliqués aux approvisionnements dont la valeur est importante. Des méthodes de gestion permettent de sélectionner les approvisionnements à forte valeur, nous allons donc développer dans un premier temps deux de ces méthodes, la méthode dite des 20/80 (ou loi de PARETO) et la méthode A, B, C.

I. Le classement des stocks suivant la valeur – les méthodes 20/80 et ABC

Pour découvrir ces méthodes, nous partirons d'une application. Nous généraliserons ensuite.

Application 1 – Le fournil de Rabelais

Le fournil de Rabelais est une boulangerie-pâtisserie industrielle qui propose une large gamme de produits.

Bien qu'industrielle sa production est de grande qualité avec un goût proche d'une production artisanale, et ce grâce à l'utilisation d'ingrédients sélectionnés auprès de producteurs reconnus.

L'ingrédient de base de ses produits est la farine. Les types de farine utilisés sont nombreux.

Les besoins de farine pour la production de la prochaine année sont résumés dans le tableau ci-après.

Types de farine	Quantité nécessaire en sac de 25 kg	Prix par 25 kg
FARINES TRADITION		
Farine de blé T45	10 000	21,00 €
Farine de blé T55	10 000	21,00 €
Farine de blé T65	6 000	24,00 €
Farine de blé T80	6 000	28,00 €
Farine de blé - complète T150	2 000	26,00 €
Farine de seigle T85	800	26,00 €
Farine sans gluten	100	87,50 €
Farine 14 céréales et graines	500	48,00 €
Farine d'épeautre	400	48,00 €
Farine de sarrasin	600	48,00 €
LES FARINES BIO		
Farine de blé BIO T65	10 000	32,00 €
Farine de blé BIO T110	2 000	34,50 €
Farine de blé complète BIO T150	300	34,50 €
Farine de seigle BIO T130	300	37,50 €
Farine d'épeautre BIO	300	59,00 €
Farine de sarrasin BIO	1 000	65,00 €
Farine de maïs BIO intégrale	100	37,00 €
Farine de gaudes BIO (maïs torréfié)	100	60,00 €
Farine de chataigne BIO	100	250,00 €
Farine de riz BIO	100	68,00 €

(cc) BY-NC-SA Réseau CRCF - Ministère de l'Éducation nationale - http://crcf.ac-grenoble.fr

Travail à faire :

1- **Après avoir calculé la valeur des approvisionnements de chaque type de farine, bâtir un tableau en vous inspirant du modèle ci-dessous. À noter que comme il y a 20 références, chacune représente 1/20 soit 5 % du total de références stockées.**

Types de farine classés suivant la valeur des approvisionnements	Quantité nécessaire en sac de 25 kg	Prix par 25 kg	Valeur des approvisionnements	Valeur en % des approvisionnements	% cumulé des valeurs	% cumulé des références
	Q	P	Q * P			

2- **En vous basant sur la méthode des 20/80 (méthode dite de Pareto) et/ou la méthode ABC, conseillez le fournil de Rabelais sur la gestion de ses stocks de farine.**

<u>Application 1</u> – Le fournil de Rabelais – Proposition de corrigé

1- **Après avoir calculé la valeur des approvisionnements de chaque type de farine, bâtir un tableau en vous inspirant du modèle ci-dessous. À noter, que comme il y a 20 références, chacune représente 1/20 soit 5 % du total de références stockées.**

Types de farine classés suivant la valeur des approvisionnements	Quantité nécessaire en sac de 25 kg	Prix par 25 kg	Valeur des approvisionnements	Valeur en % des approvisionnements	% cumulé des valeurs	% cumulé des références	
	Q	P	Q * P				
Farine de blé BIO T65	10 000	32,00 €	320 000,00 €	22,53%	22,53%	5%	Cat A
Farine de blé T45	10 000	21,00 €	210 000,00 €	14,79%	37,31%	10%	
Farine de blé T55	10 000	21,00 €	210 000,00 €	14,79%	52,10%	15%	
Farine de blé T80	6 000	28,00 €	168 000,00 €	11,83%	63,93%	20%	
Farine de blé T65	6 000	24,00 €	144 000,00 €	10,14%	74,07%	25%	
Farine de blé BIO T110	2 000	34,50 €	69 000,00 €	4,86%	78,92%	30%	Cat B
Farine de sarrasin BIO	1 000	65,00 €	65 000,00 €	4,58%	83,50%	35%	
Farine de blé - complète T150	2 000	26,00 €	52 000,00 €	3,66%	87,16%	40%	
Farine de sarrasin	600	48,00 €	28 800,00 €	2,03%	89,19%	45%	
Farine de chataigne BIO	100	250,00 €	25 000,00 €	1,76%	90,95%	50%	
Farine 14 céréales et graines	500	48,00 €	24 000,00 €	1,69%	92,64%	55%	
Farine de seigle T85	800	26,00 €	20 800,00 €	1,46%	94,10%	60%	
Farine d'épeautre	400	48,00 €	19 200,00 €	1,35%	95,46%	65%	
Farine d'épeautre BIO	300	59,00 €	17 700,00 €	1,25%	96,70%	70%	
Farine de seigle BIO T130	300	37,50 €	11 250,00 €	0,79%	97,49%	75%	Cat C
Farine de blé complète BIO T150	300	34,50 €	10 350,00 €	0,73%	98,22%	80%	
Farine sans gluten	100	87,50 €	8 750,00 €	0,62%	98,84%	85%	
Farine de riz BIO	100	68,00 €	6 800,00 €	0,48%	99,32%	90%	
Farine de gaudes BIO (maïs torréfié)	100	60,00 €	6 000,00 €	0,42%	99,74%	95%	
Farine de maïs BIO intégrale	100	37,00 €	3 700,00 €	0,26%	100,00%	100%	
			1 420 350 €	**100,00%**			

2- **En vous basant sur la méthode des 20/80 (méthode dite de Pareto) et/ou la méthode ABC, conseillez le fournil de Rabelais sur la gestion de ses stocks de farine.**

<u>Le tableau ci-dessus permet de classer les articles en plusieurs catégories.</u>

Nous constatons que 25 % des références (soit 5) représentent 74,07 % de la valeur total des approvisionnements en farine (la répartition 20/80 n'étant qu'une moyenne qu'il convient d'adapter à chaque cas d'étude).

Nous gérerons de manière extrêmement rigoureuse ces cinq références (les cinq premières du tableau) en évitant tout sur stockage coûteux, mais en évitant également les ruptures de stock préjudiciables pour notre image de marque vis-à-vis de nos clients. Nous pouvons pour cela nous aider d'un modèle mathématique permettant d'optimiser notamment le coût de gestion des stocks et qui évite la pénurie (rupture de stock).

(cc) BY-NC-SA Réseau CRCF - Ministère de l'Éducation nationale - http://crcf.ac-grenoble.fr

Les autres références, dont les achats sont beaucoup plus faible feront l'objet d'un approvisionnement permettant d'éviter les ruptures de stock. Il est conseillé d'utiliser un logiciel permettant de déclencher un approvisionnement lors que le stock diminue fortement, en deçà d'un seuil appelé stock d'alerte (qui va déclencher la commande). Le coût de gestion des stocks ne sera pas, pour ces références, le paramètre essentiel (on peut toutefois éviter les stocks pléthoriques inutiles en limitant le stock à un niveau programmé appelé stock maximum).

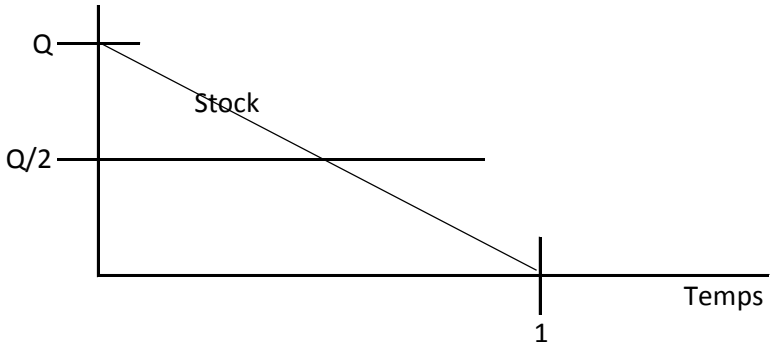
Nous pouvons affiner l'analyse en créant trois catégories pour les références évoquées ci-dessus (utilisation de la méthode dite ABC, où les stocks sont classés en trois groupes). L'appartenance au groupe est précisée dans le tableau ci-dessus. Pour les références du groupe C, le nombre de commandes sera peu élevé, mais avec des quantités permettant la tranquillité.

II. Le calcul du stock moyen dans l'hypothèse d'une consommation régulière

Dans la plupart des modèles scientifiques de gestion des stocks, nous faisons l'hypothèse d'une consommation régulière dans le temps des éléments en stock (matières, composants, marchandises,…).

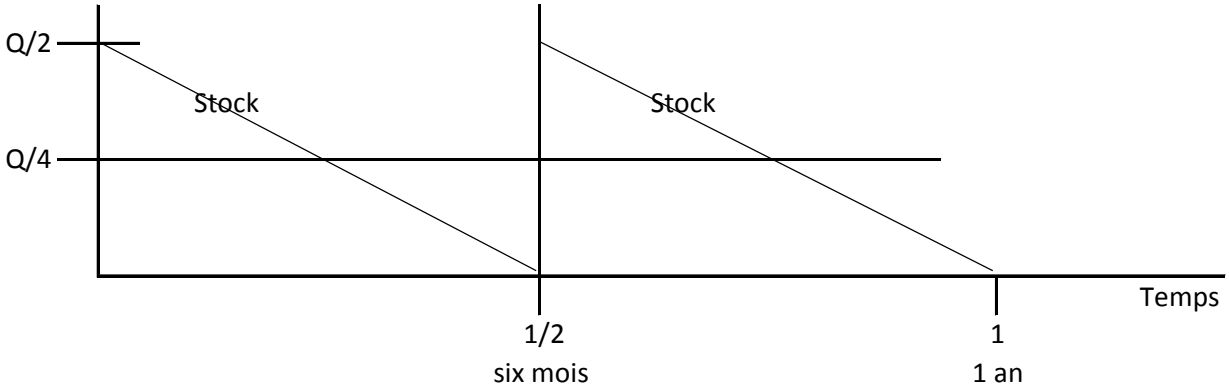
C'est une hypothèse simplificatrice, qu'il convient donc de vérifier dans la réalité avant d'utiliser un modèle qui reprend cette hypothèse. Celle-ci est bien pratique, car la régularité entraîne la proportionnalité (si vous consommez 100 articles par jour, vous en consommerez 100 x 10 = 1 000 en dix jours par exemple). La consommation est proportionnelle au temps.

Supposons dans un premier temps qu'une entreprise n'effectue qu'une commande par an, et que la quantité consommée au cours d'une année est notée Q. Cette quantité représente selon l'activité de l'entreprise des matières, des composants, des marchandises, etc. Avec une consommation régulière dans le temps, nous pouvons représenter l'évolution du stock à l'aide du schéma suivant : (la droite représente l'évolution du stock)



Comme tout est proportionnel, nous voyons bien qu'intuitivement **<u>le stock moyen est égal à Q/2</u>**. Nous pouvons facilement le démontrer en calculant notamment l'aire du triangle, mais nous admettrons ce résultat.

Envisageons maintenant le cas où l'entreprise fait deux commandes dans l'année, une tous les six mois. La consommation étant régulière, elle commandera à chaque fois Q/2 (nous avons bien 2 x Q/2 = Q). Le graphique devient :



(cc) BY-NC-SA Réseau CRCF - Ministère de l'Éducation nationale - http://crcf.ac-grenoble.fr

Comme tout est proportionnel, nous voyons bien qu'intuitivement **le stock moyen est égal à Q/4**. Nous pouvons ici également, facilement le démontrer, en calculant notamment l'aire du triangle, mais nous admettrons ce résultat.

Généralisation

Hypothèse : la consommation est régulière par unité de temps.

Quantité consommée sur la durée de l'étude (un an par exemple) : Q.

Nombre de commande (cadence d'approvisionnement) sur la durée de l'étude : N.

Stock moyen = Q / 2N

Utilisation : le stock moyen permet de faciliter le calcul du coût de stockage (avoir beaucoup de stock en début de période et plus du tout en fin de période est équivalent à avoir en permanence en stock la quantité du stock moyen).

III. La gestion des approvisionnements et le modèle de Wilson

La préoccupation liée aux coûts de stockage n'est pas nouvelle. Il est généralement admis que les approches scientifiques de gestion des stocks se sont développées avec la crise de 1929. Celle-ci a généré des stocks importants et coûteux qu'il fallait écouler. Pour éviter les stocks inutiles, il apparait alors nécessaire d'anticiper ses approvisionnements afin d'optimiser les coûts de gestion des stocks.

Le modèle de Wilson est qualifié de modèle déterministe, ce qui signifie que les éléments sont connus avec certitudes (quantité consommée, coût d'une commande, etc.), nous ne faisons pas intervenir les probabilités.

Un peu d'histoire

(Sources : https://abcsupplychain.com/formule-de-wilson/ et https://fr.wikipedia.org/wiki/Formule_de_Wilson)

« Il faut savoir que la formule de Wilson n'a pas été inventé par monsieur Wilson mais par Ford Whitman Harris qui a développé le principe mathématique. C'est ensuite un consultant industriel spécialisé en gestion de stock, Monsieur R.H.Wilson qui a vraiment utilisé et appliqué cette formule à l'optimisation de stock. »

« Issue de la recherche opérationnelle, la formule de Wilson (1934) également connue sous le nom Quantité Économique de Commande ou EOQ (Economic Order Quantity) sous son nom original, ou aussi formule du lot économique détermine la période optimale de réapprovisionnement d'une unité de production (magasin, usine). Elle est couramment employée par les services logistiques. Elle a en fait été introduite dès 1913 par Ford W. Harris, mais a été attribué à Wilson car il en a fait l'analyse en profondeur ».

Les coûts de gestion des stocks

Le modèle de Wilson distingue deux types de coût :

- **Le coût de lancement des commandes** (encore appelé **coût de passation** des commandes ou **coût d'acquisition**). Ce coût est composé des coûts que génère toute passation d'une commande à un fournisseur, dont les coûts administratifs. Dans le modèle de Wilson, le coût par commande est un montant fixe.
- **Le coût de possession du stock (le coût de stockage proprement dit).** Ce coût est variable en fonction de la nature du produit (des produits nécessitent souvent des conditions particulières de stockage). Il peut être proportionnel à la valeur du stock (coût de la trésorerie mobilisée par exemple). Il n'est parfois qu'uniquement proportionnel à la quantité en stock.

Remarque : lorsque le prix d'achat est fixe, il n'est pas nécessaire d'intégrer au coût global, le prix d'achat des approvisionnements. Nous développerons ce point dans les applications.

Coût de gestion des stocks = Coût de lancement (ou Coût d'acquisition ou Coût de passation) + Coût de possession du stock

Si nous tenons compte du prix d'achat des approvisionnements : (***vocabulaire non normalisé***)

Coût total des approvisionnements = Prix ou coût d'achat + coût de gestion des stocks

(cc) BY-NC-SA Réseau CRCF - Ministère de l'Éducation nationale - http://crcf.ac-grenoble.fr

Les hypothèses du modèle de Wilson

- La consommation est régulière dans le temps (la demande par unité de temps est régulière, c'est-à-dire constante).
- Aucune pénurie (rupture de stock) n'est admise.
- Le prix unitaire est identique quelle que soit la quantité commandée à chaque réapprovisionnement.

Étude à partir d'un exemple – Application 2 (avec corrigé)

Reprenons le cas du fournil de Rabelais, une boulangerie-pâtisserie industrielle. Nous nous intéressons à l'une des matières premières, la farine de blé T65. Les données sont résumées dans le tableau suivant :

Matière première	Quantité annuelle nécessaire en sac de 25 kg	Prix par 25 kg	Taux annuel de possession du stock (1)	Coût d'une commande
	Q	p	t	Ca
Farine de blé T65	6 000	24,00 €	3%	60,00 €

Les hypothèses du modèle de Wilson sont supposées vérifiées.

(1) Le taux de possession du stock s'applique sur la valeur du stock. Nous pouvons également utiliser le terme « coût du stock en pourcentage de sa valeur » pour le définir.

Écrivons le coût de gestion des stocks en fonction de nombre de commandes dans l'année (que nous noterons N) :

- Coût de lancement (ou Coût d'acquisition ou Coût de passation) = **60 * N**

  Le coût des commandes est en effet égal au coût d'une commande par le nombre de commandes dans l'année.
- Coût de possession du stock= stock moyen * prix unitaire * taux de possession du stock

  (6000 / 2N) * 24 * 3% = **2160 / N**

  Le stock moyen a été défini précédemment. Nous pouvons l'appliquer ici dans la mesure où par hypothèse la consommation est régulière.
- **Coût de gestion des stocks** = Coût de lancement + Coût de possession du stock = **60 * N + 2160 / N**
- Si nous rajoutons le prix des achats (soit 6 000 * 24 = 144 000 €), nous avons : **Coût total des approvisionnements** = Prix ou coût d'achat + coût de gestion des stocks = **144 000 + 60 * N + 2160 / N**

Remarque : on note que ci-dessus, le coût total des achats sur l'année n'est pas dépendant de la variable N (nombre de commandes), il est de 144 000 €. Donc dans le modèle de Wilson, pour minimiser le coût total des approvisionnements, il suffit de minimiser le coût de gestion des stocks.
En effet, pour optimiser une fonction (calcul d'un minimum ou d'un maximum), nous pouvons utiliser la dérivée de la fonction, or la dérivée d'une valeur (ici 144 000) est nulle.

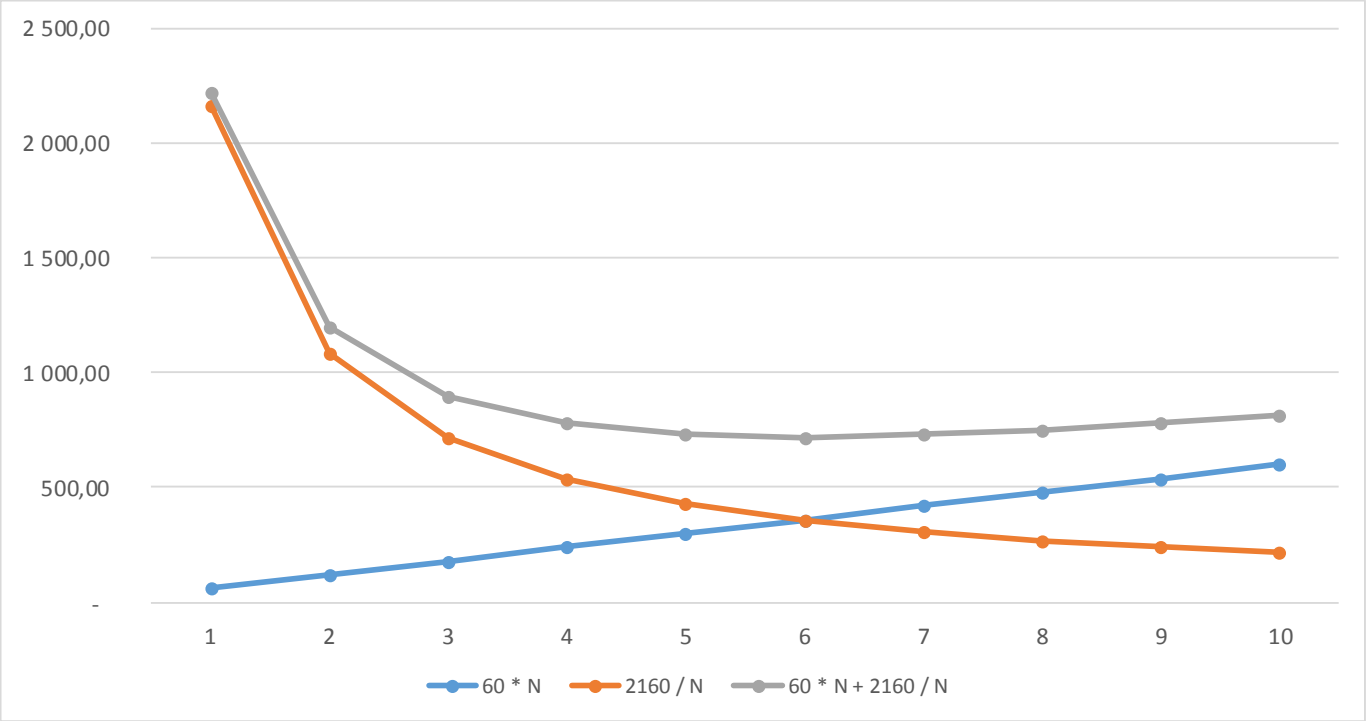
Nous noterons C(N) le coût de gestion des stocks, fonction de la variable N : C(N) = 60 * N + 2160 / N.
C(N) est également appelé fonction économique.

Avant de trouver la valeur de N qui permet de minimiser le coût de gestion des stocks, représentons graphiquement les coûts qui le composent ainsi que leur somme. Nous pouvons dresser le tableau suivant pour réaliser ce graphique à l'aide d'un tableur :

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
60 * N	60,00	120,00	180,00	240,00	300,00	360,00	420,00	480,00	540,00	600,00
2160 / N	2 160,00	1 080,00	720,00	540,00	432,00	360,00	308,57	270,00	240,00	216,00
60 * N + 2160 / N	2 220,00	1 200,00	900,00	780,00	732,00	720,00	728,57	750,00	780,00	816,00

Nous obtenons la représentation graphique suivante :

(cc) BY-NC-SA Réseau CRCF - Ministère de l'Éducation nationale - http://crcf.ac-grenoble.fr



Le tableau de calcul et le graphique permettent de voir que le minimum est atteint lorsque le nombre de commandes dans l'année est N = 6.

Il n'est pas toujours aisé de lire graphiquement la solution, elle peut être déterminée par le calcul. Pour trouver la solution par le calcul, deux méthodes sont possibles. Nous privilégierons la première car elle évite de passer par la notion de dérivée d'une fonction.

<u>Première méthode</u> : le coût de gestion des stocks est minimum quand le coût de lancement est égal au coût de possession des stocks.

Nous admettrons le résultat précisé dans l'encadré ci-dessus (cette propriété se démontre facilement et nous pouvons l'admettre sans difficulté). **Nous l'observons d'ailleurs sur le graphique**.

Pour comprendre cette propriété, il est intéressant d'analyser le graphique et de constater que :

- Le coût de lancement est croissant en fonction du nombre de commandes ;
- Le coût de possession du stock est décroissant en fonction du nombre de commandes ;
- Il apparait donc logique qu'un équilibre soit trouvé entre les deux coûts. Avant le minimum, le coût de gestion des stocks est décroissant (branche « descendante » du coût) et après il est croissant (branche « ascendante » du coût).

En utilisant la propriété coût de lancement = coût de possession à l'optimum (minimum), nous avons :

$60 * N = 2160 / N$ et donc : $60 * N^2 = 2160$ soit $N^2 = 2160 / 60 = 36$ d'où N = 6 commandes (racine de 36)

Nous pouvons en déduire un certain nombre de valeurs relatives aux approvisionnements à l'optimum :

- N = nombre de commande = **6** appelé également cadence
- q = nombre de sacs de 25 kg commandés à chaque réapprovisionnement = Q / N = 6 000 / 6 = **1 000 sacs** par commande. q est également appelé le lot économique.
- T = période qui sépare deux réapprovisionnements = 1 / N en année ou 12 / N en mois ou 360 / N et jours. Dans notre cas T = 12 / 6 = **2 mois** (6 commandes par an donc une commande tous les deux mois).
- Coût minimum de gestion des stocks = C(6) = 6 * 60 + 2160 / 6 = 360 + 360 = **720 €**. (On retrouve l'égalité coût de lancement = coût de possession à l'optimum). (144 720 € en ajoutant le prix d'achat).
- Le stock à chaque début de période est de 1 000, il est également appelé stock actif optimal et souvent noté S.

(cc) BY-NC-SA Réseau CRCF - Ministère de l'Éducation nationale - http://crcf.ac-grenoble.fr

<u>Deuxième méthode</u> : le calcul de la valeur de N qui annule la dérivée.

Nous calculons la dérivée de la fonction C(N) = 60 * N + 2160 / N

Nous obtenons : C'(N) = 60 – 2160 / N^2

La représentation graphique de C(N) nous permet de voir qu'il y a un minimum. Ce dernier est obtenu quand la dérivée de la fonction s'annule : C'(N) = 0 donc quand 60 – 2160 / N^2 = 0 soit 60 = 2160 / N^2 et donc N^2 = 2160 / 60 = 36. Nous retrouvons la valeur obtenue avec la méthode précédente soit N = 6.

Nous en déduisons comme précédemment les valeurs de q, T, C(6) et S.

Écriture de la fonction de coût en fonction de q (quantité commandée à chaque réapprovisionnement)

Dans ce qui précède la fonction de coût a été écrite en fonction de la variable N, nombre de commandes. Nous pouvons écrire cette fonction de coût en fonction de q la quantité commandée à chaque réapprovisionnement, sachant que N = Q / q. Nous notons C(q) cette fonction correspondant au coût de gestion des stocks [C(q) = C(N)].

Précisons que le stock moyen Q / 2 N = q / 2 (en remplaçant N par Q / q)

Dans notre exemple Q = 6 000 sacs.

En fonction de q nous avons :

- Coût de lancement = 60 * 6000 / q = **360 000 / q**
- Coût de possession = q / 2 * 24 * 3% = **0,36 q**

Donc

- Coût de gestion des stocks = **C(q) = 360 000 / q + 0,36 q**

Écrire la fonction de coût en fonction de q plutôt que de N peut être utile quand nous évoquerons les tarifs dégressifs (voir plus loin).

En utilisant l'une des deux méthodes précédentes, nous pouvons calculer la valeur de q qui minimise le coût de gestion des stocks.

À l'optimum : 360 000 / q = 0,36 q donc q^2 = 360 000 / 0,36 = 1 000 000 d'où **q = 1 000 sacs par commande** (racine de 1 000 000).

Nous en déduisons facilement les autres valeurs :

- q = 1000 sacs par commande ;
- N = 6000 / q = 6 commandes ;
- T = 12 / 6 = 2 mois
- C(1 000) = 360 000 / 1 000 + 0,36 *1 000 = 360 + 360 = 720 €

<u>Important</u> : ***nous allons généraliser page ci-après le modèle de Wilson étudié ci-dessus à partir d'un exemple. Nous donnerons les formules des valeurs optimales (qui minimisent le coût de gestion des stocks). Nous attirons toutefois l'attention des candidats sur la nécessité à l'examen de présenter la fonction de coût à minimiser. Un minimum de formalisation est attendu, le seul calcul des valeurs ne suffit pas. Le programme de DCG le précise. Nous conseillons donc l'approche développée dans cet écrit notamment dans l'application 2.***

(cc) BY-NC-SA Réseau CRCF - Ministère de l'Éducation nationale - http://crcf.ac-grenoble.fr

Nom des données ou variables (pas de normalisation en la matière)

Préambule :

Durée de l'étude : une unité de temps (par exemple 1 an ou 1 trimestre ou 1 semestre ou 1 mois…). En général la politique d'approvisionnement s'étudie sur un an ou un mois, mais d'autres durées ne sont pas exclues. **L'important c'est l'homogénéité des données** ***: si l'unité de temps est par exemple l'année, toutes les données qui sont proportionnelles au temps devront être exprimées pour une année***. *Certains ouvrages proposent des développements mathématiques en utilisant une variable pour exprimer l'unité de temps, cela complexifie inutilement à notre sens l'exposé du modèle*.

Données et variables :

- Q = quantité consommée pendant l'unité de temps (un an, un mois…) ;
- p = prix unitaire de l'élément en stock (matière, composant, marchandise…) ;
- Ca = coût de lancement d'une commande (ou d'acquisition ou de passation) ;
- t = taux de possession du stock (pour un euro) ;
- N = nombre de commandes passées pendant l'unité de temps (un an, un mois…) ;
- q = quantité commandée à chaque réapprovisionnement ;
- T = durée de la période c'est-à-dire la durée qui sépare deux réapprovisionnements.

Relation entre les données et variables :

N = Q / q q = Q / N T = 1 / N = Q / q

On rappelle que la consommation étant régulière le stock moyen est Q / 2N = q / 2

Modèle de Wilson avec expression du coût en fonction de N (nombre de commandes)

- **Coût de lancement (ou Coût d'acquisition ou Coût de passation) = Ca * N**
- **Coût de possession du stock = Q/2N * p * t**
- **Coût de gestion des stocks = Coût de lancement (ou Coût d'acquisition ou Coût de passation) + Coût de possession du stock = C(N) = Ca * N + Q/2N * p * t**

Si nous tenons compte du prix d'achat des approvisionnements : (***vocabulaire non normalisé***)

Coût total des approvisionnements = Prix ou coût d'achat + coût de gestion des stocks = Q * p + Ca * N + Q/2N * p * t

En utilisant l'une des deux méthodes décrites dans l'application 2, nous pouvons démontrer que le coût est minimum lorsque $N = \sqrt{\frac{Qpt}{2Ca}}$ (formule dit de Wilson)

Les autres valeurs [q, T et C(N)] se déduisent de N (voir application 2).

Modèle de Wilson avec expression du coût en fonction de q (quantité par commande)

- **Coût de lancement (ou Coût d'acquisition ou Coût de passation) = Ca * Q / q**
- **Coût de possession du stock = q/2 * p * t**
- **Coût de gestion des stocks = Coût de lancement (ou Coût d'acquisition ou Coût de passation) + Coût de possession du stock = C(q) = Ca * Q / q + q/2 * p * t**

En utilisant l'une des deux méthodes décrites dans l'application 2, nous pouvons démontrer que le coût est minimum lorsque $q = \sqrt{\frac{2CaQ}{pt}}$

Les autres valeurs [N, T et C(q)] se déduisent de q (voir application 2).

(cc) BY-NC-SA Réseau CRCF - Ministère de l'Éducation nationale - http://crcf.ac-grenoble.fr

Les limites du modèle de Wilson

- Comme tout modèle, les premières limites sont liées aux restrictions apportées par les hypothèses. La demande doit être suffisamment régulière pour que les résultats aient un sens, or c'est souvent loin d'être le cas. De même il est supposé que le prix soit le même quelle que soit la quantité q commandée à chaque réapprovisionnement. Or les fournisseurs proposent souvent des tarifs dégressifs en fonction des quantités livrées, le prix total des achats devient dès lors variable. Nous verrons toutefois que le modèle de Wilson peut s'appliquer moyennant quelques adaptations (voir plus loin dans ce document).
- La seconde limite porte sur la nature des produits : les éléments stockés sont parfois des produits périssables auquel cas c'est alors une donnée supplémentaire qu'il faut prendre en compte dans le rythme des réapprovisionnements.
- L'application 2 a été bâtie de telle sorte que le résultat débouche sur un nombre entier de commandes. Mais dans la réalité, ce n'est souvent pas le cas. Cela nécessite d'arrondir les valeurs.

Cas particulier : cas où le coût de stockage est indépendant de la valeur du stock ou qu'elle n'est pas connue dans les applications

Le coût de possession du stock dépend dans ce qui précède du prix unitaire des articles en stocks, et donc de la valeur du stock, et d'un taux applicable sur cette valeur.

Parfois le coût de stockage est exprimé par unité stockée et par unité de temps. Autrement dit nous ne connaissons ni t, ni p, mais à la place nous avons une valeur s. Nous allons prendre un exemple pour illustrer ce cas (application 3)

Application 3 (avec corrigé)

Nous reprenons le cas du fournil de Rabelais, une boulangerie-pâtisserie industrielle. Nous nous intéressons cette fois-ci à la farine de blé bio T65. Les données sont résumées dans le tableau suivant :

Matière première	Quantité annuelle nécessaire en sac de 25 kg	Coût de stockage par sac et par an	Coût d'une commande
	Q	s	Ca
Farine de blé bio T65	12 000	0,36 €	60,00 €

Les hypothèses du modèle de Wilson sont supposées vérifiées.

Le coût de gestion du stock en fonction du nombre de commandes est noté C(N) il se calcule comme suit :

- Coût de lancement = **60 * N**
- Coût de possession du stock= stock moyen * coût de stockage par sac et par an

  (12000 / 2N) * 0,36 = **2160 / N**

  Attention à bien vérifier que le coût de stockage est dans la même unité de temps que la durée de l'étude (un an dans notre cas)
- **Coût de gestion des stocks** = Coût de lancement + Coût de possession du stock = **60 * N + 2160 / N**

Nous pouvons ensuite calculer l'optimum comme vu dans l'application 2.

Généralisation – Modèle de Wilson avec coût de stockage par article

Nous reprenons les données et variables précédentes hormis p et t, que nous remplaçons par s :

s = coût par unité stockée et par unité de temps (durée de l'étude : 1 an, ou 1mois, ou…)

Coût de gestion des stocks = Coût de lancement + Coût de possession du stock = C(q) = Ca * N + Q/2N * s

En utilisant l'une des deux méthodes décrites dans l'application 2, nous pouvons démontrer que le coût est minimum lorsque $N = \sqrt{\frac{Qs}{2Ca}}$

Les autres valeurs [q, T et C(N)] se déduisent de N (voir application 2).

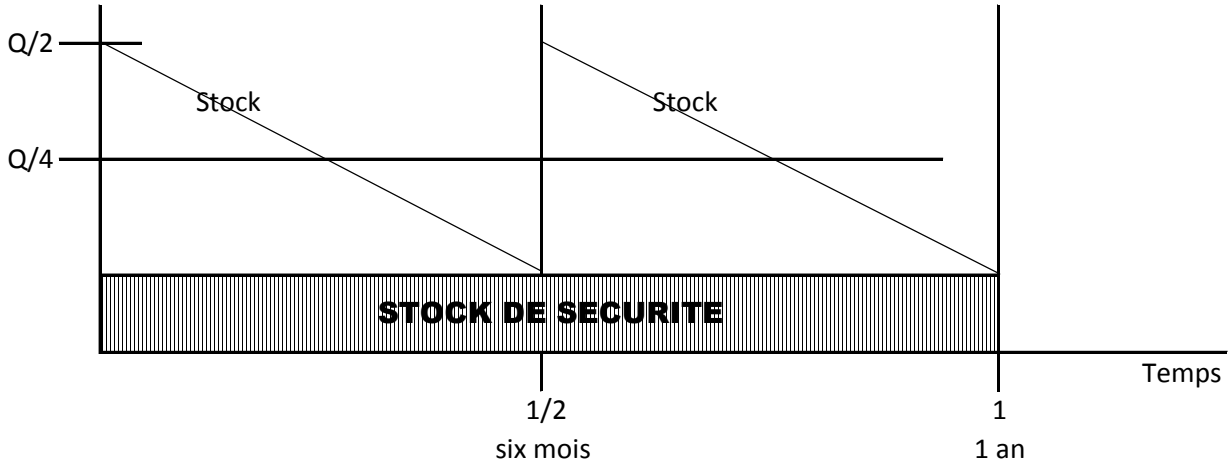
(cc) BY-NC-SA Réseau CRCF - Ministère de l'Éducation nationale - http://crcf.ac-grenoble.fr

IV. La prise en compte d'un stock de sécurité et le modèle de Wilson

Pour faire face aux aléas (retard de livraison ou accélération de la demande notamment), les entreprises prévoient généralement un stock de sécurité afin d'éviter les ruptures de stock. Ces dernières sont préjudiciables car elles peuvent retarder la production ou la livraison de marchandises aux clients et affecter l'image de marque de l'entreprise.

Le stock de sécurité peut être fixe ou variable. Nous n'envisagerons que le cas d'un stock de sécurité fixe. La prise en compte d'un stock de sécurité variable dépasse le cadre des exigences du DCG quant aux aspects mathématiques.

Dans le cas d'une demande régulière, compatible avec l'application du modèle de Wilson, nous pouvons proposer le schéma suivant dans l'exemple de deux commandes par an :



Le stock de sécurité étant constant toute l'année (ou toute la durée d'étude envisagée), son coût de possession est fixe. Il ne modifie donc pas le nombre de commandes N et la quantité économique (q) qui minimise le coût de gestion des stocks (c'est un résultat démontré et que nous admettrons). Le coût de gestion des stocks est augmenté du coût de possession du stock de sécurité.

Application 4 (avec corrigé)

Nous reprenons les données de l'application 2.

Pour faire face aux aléas, l'entreprise dispose en permanence d'un stock de sécurité de 500 sacs de 25 kg de farine de blé T65. Au début de l'année considérée, le stock initial est égal à 500 sacs.

TAF : Quelles sont les conséquences sur la politique d'approvisionnement de l'entreprise et sur le coût de gestion du stock ?

Proposition de réponse

- Le stock initial étant déjà constitué en début d'année, les achats de l'année porteront sur 6 000 sacs, consommations prévue pour l'année. Dans le cas contraire, il aurait fallu acquérir ces 500 sacs et donc les ajouter aux 6 000 nécessaires.

  Donc, dans le cas présent, les valeurs optimales de N, q et T déjà calculées dans l'application 2 restent identiques, dans la mesure où aucune donnée n'est modifiée :

  N = 6 commandes ; q = 1 000 sacs par commande ; T = 2 mois
- Le coût de possession du stock de sécurité est égal à sa valeur multiplié par le taux annuel de stockage, 3 %, il est donc de : 500 sacs * 24 € * 3 % = 360 euros.
- Le coût optimal de gestion des stocks est augmenté du montant ci-dessus, il devient égal à 720 + 360 = 1 080 euros.

(cc) BY-NC-SA Réseau CRCF - Ministère de l'Éducation nationale - http://crcf.ac-grenoble.fr

V. La prise en compte des tarifs dégressifs et le modèle de Wilson

Le modèle de Wilson repose sur un prix unitaire d'acquisition des éléments en stock identique quelle que soit la quantité commandée à chaque réapprovisionnement.

Bien souvent les fournisseurs proposent des tarifs plus avantageux, tarifs dits dégressifs, en fonction des quantités achetées lors d'une commande.

Il est possible d'adapter le modèle afin de prendre en compte ces tarifs dégressifs, c'est ce que nous développons dans ce qui suit.

Nous ne pouvons pas généraliser ce type de cas, chacun est spécifique, il s'agit donc de s'adapter à la situation. Nous allons proposer des approches à travers une application.

Application 5 (avec corrigé) – adaptée d'un sujet de BTS comptabilité et gestion des entreprises

L'entreprise SOCAB souhaite améliorer la gestion de ses stocks. Le responsable du projet a relevé les éléments suivants concernant une des principales marchandises stockées :

- La demande est régulière et égale à 10 articles par jour ;
- Le coût de lancement d'une commande est de 180 € ;
- Le taux de possession du stock est de 2 % par jour de stockage, il s'applique sur la valeur du stock ;

  Ce taux est élevé car les marchandises doivent être conservées dans des conditions de température constante et basse (4 degré Celsius) ;
- Le nombre de jours ouvrables est en moyenne de 300 dans l'entreprise ;
- Le fournisseur de la SOCAB propose un tarif dégressif selon le barème suivant :

Quantité q par commande	Prix d'achat unitaire HT
$q < 50$	50 €
$50 \leq q < 80$	45 €
$q \geq 80$	40 €

<u>Votre mission</u> : conseillez l'entreprise sur la politique annuelle d'approvisionnement à adopter.

Proposition de réponse

Nous proposons deux approches, d'autres sont sans doute possibles. Ces deux approches ont des éléments communs que nous développons dans un premier temps.

Dans le cas présent, le prix d'achat n'est pas fixe, nous devons donc l'inclure dans la fonction de coût, et calculer ainsi le coût total des approvisionnements. La durée de l'étude est d'une année. Nous allons écrire la fonction de coût en fonction du paramètre p (le prix) et la variable q, nous appelons $C_p(q)$ cette fonction appelée fonction paramétrique.
La demande annuelle Q est de 300 * 10 = 3 000 articles.
Attention : prenez garde à l'homogénéité des données, le taux est donné par jour, il faut le convertir en année ouvrable et le multiplier par 300 pour le calcul du coût annuel.

Coût total des approvisionnements = Prix ou coût d'achat + Coût de lancement + Coût de possession du stock

- **Prix ou coût d'achat = <u>3000 p</u>**
- **Coût de lancement = 180 * 3000 / q = <u>540 000 / q</u>**
- **Coût de possession du stock q/2 * p * (0.02*300) = <u>3 p q</u> (stock moyen * taux 2 % * 300 jours)**

Donc :

- **Coût total des approvisionnements = $C_p(q)$ = <u>3000 p + 540 000 / q+ 3 p q</u>**

(cc) BY-NC-SA Réseau CRCF - Ministère de l'Éducation nationale - http://crcf.ac-grenoble.fr

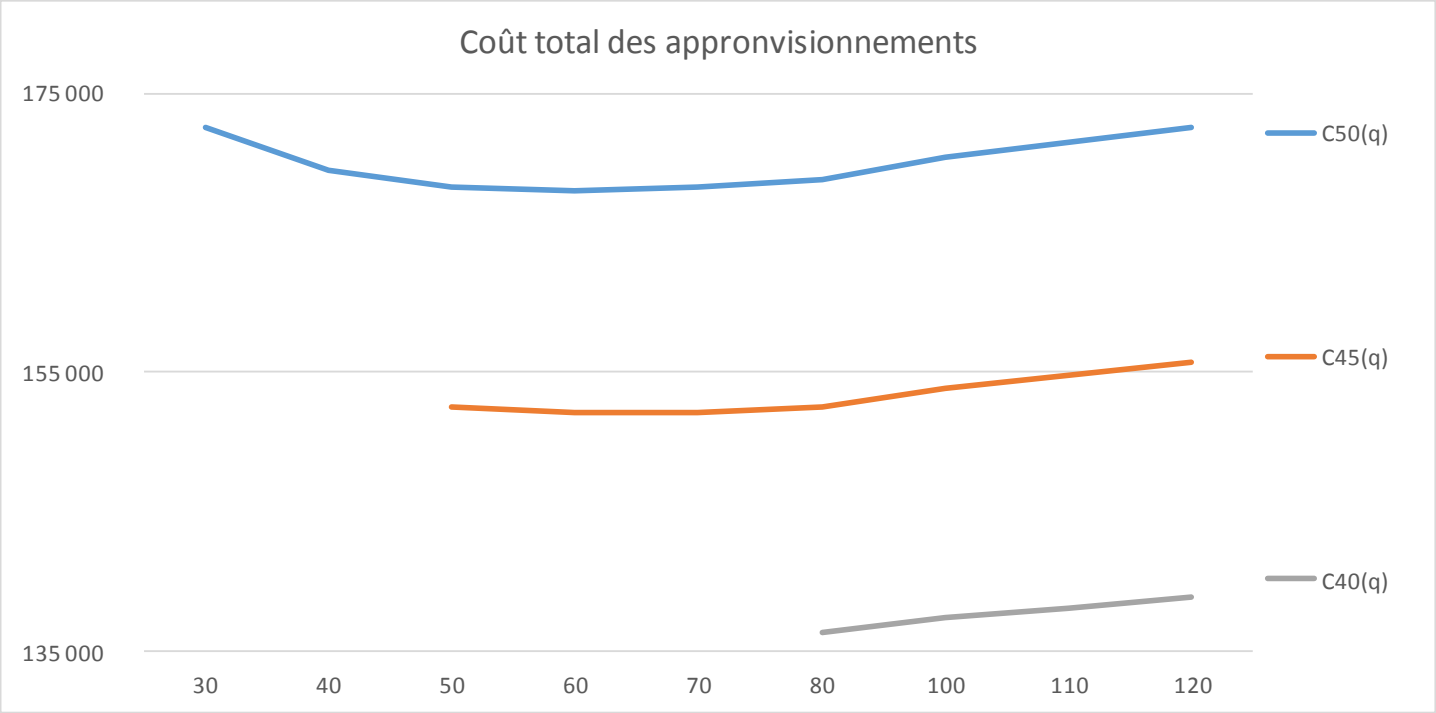
Nous avons donc : (on remplace p par sa valeur)

Quantité q par commande	Prix d'achat unitaire HT	Coût total des approvisionnements
$q < 50$	50 €	**$C_{50}(q) = 150\,000 + 540\,000 / q + 150\,q$**
$50 \leq q < 80$	45 €	**$C_{45}(q) = 135\,000 + 540\,000 / q + 135\,q$**
$q \geq 80$	40 €	**$C_{40}(q) = 120\,000 + 540\,000 / q + 120\,q$**

Première approche – la résolution graphique

Nous allons bâtir un graphique qui représente les trois fonctions de coût (en tenant compte des intervalles de définition, car pour obtenir le prix proposé, il faut respecter un minimum de quantité par commande).

q	30	40	50	60	70	80	100	110	120
$C_{50}(q)$	172 500	169 500	168 300	168 000	168 214	168 750	170 400	171 409	172 500
$C_{45}(q)$			152 550	152 100	152 164	152 550	153 900	154 759	155 700
$C_{40}(q)$						136 350	137 400	138 109	138 900



Le graphique permet de voir aisément que le coût le plus faible est obtenu pour la courbe de la fonction $C_{40}(q)$. Comme nous somme sur la branche ascendante de coût de cette fonction, nous lisons également que le minimum est obtenu pour q = 80 articles par commande.

Conclusion :

- Le coût de gestion des stocks est minimum quand la quantité commandée à chaque réapprovisionnement est de **80 articles**.
- Le nombre de commandes par an est de : 3000 / 80 = 37,5 arrondi à 38.
- La périodicité des commandes est de 300 / 38 soit environ 8 jours ouvrables.
- Le coût minimum de gestion des stocks est $C_{40}(q)$ = **136 350 €** (120 000 + 540000/80 + 120 *80)

Deuxième approche – la résolution par le calcul

Nous allons calculer l'optimum pour chaque fonction de coût. Nous pouvons présenter les calculs dans le tableau ci-après.

(cc) BY-NC-SA Réseau CRCF - Ministère de l'Éducation nationale - http://crcf.ac-grenoble.fr

Quantité q par commande	Prix d'achat unitaire HT	Coût total des approvisionnements	Minimum théorique	Minimum compatible	Minimum retenu	Coût obtenu
$q < 50$	50 €	$C_{50}(q) = 150\,000 + 540\,000 / q + 150\,q$	60,00	Non	49	168 370,41 €
$50 \leq q < 80$	45 €	$C_{45}(q) = 135\,000 + 540\,000 / q + 135\,q$	63,25	Oui	63	152 076,43 €
$q \geq 80$	40 €	$C_{40}(q) = 120\,000 + 540\,000 / q + 120\,q$	67,08	Non	80	136 350,00 €

Explication des calculs :

Pour calculer le minimum « théorique », nous ne tenons pas compte de la contrainte sur la quantité (intervalle de définition), nous appliquons ce que nous avons étudié sur le modèle de Wilson. Nous savons que le coût est minimum quand coût de lancement = coût de possession donc pour chaque cas :

(1) 540 000 / q = 150 q soit q = 60
(2) 540 000 / q = 135 q soit q = 63,25
(3) 540 000 / q = 120 q soit q = 67,08

Il faut ensuite vérifier que le minimum trouvé se trouve dans l'intervalle permettant d'obtenir le prix correspondant.

Pour le premier cas, il faut des commandes de moins de 50 articles. Comme nous sommes sur la branche descendante du coût (voir graphique), nous retenons la valeur la plus proche de 50 soit 49 articles.

Dans le second cas, la valeur est compatible avec l'intervalle (63 est compris entre 50 et 80). Nous conservons donc 63 articles pour minimum.

Dans le dernier cas, la valeur trouvée n'est pas compatible car inférieure à 80. Étant sur la branche ascendante du coût (voir graphique), nous retenons la valeur compatible la plus proche de 67, soit 80 articles.

Il nous suffit ensuite de calculer le coût avec chaque fonction de coût en remplaçant q par la valeur retenue (minimum retenu).

Conclusion : (nous retrouvons les résultats précédents)

- Le coût de gestion des stocks est minimum quand la quantité commandée à chaque réapprovisionnement est de **80 articles**.
- Le coût minimum de gestion des stocks est $C_{40}(q)$ = **136 350 €.**

VI. La prise en compte des ruptures de stock : le modèle avec pénurie et demande différée

Dans le modèle de Wilson, les ruptures de stocks ne sont pas envisagées.

Le modèle avec pénurie admise et demande différée permet de les intégrer. Le terme utilisé est « pénurie avec demande différée » et non pas rupture de stock car la sortie de stock est seulement différée. Prenons le cas d'une entreprise commerciale (revente de marchandises préalablement achetées), en cas de rupture de stock, le client sera livré quand le stock sera de nouveau approvisionné, il n'y a pas de perte de ventes.

La rupture de stock n'est toutefois pas neutre et présente un coût pour l'entreprise. Ce coût est appelé coût de pénurie. La nature de ce coût dépend de l'activité et de la structure de l'entreprise. Pour une entreprise commerciale il peut représenter la remise à accorder aux clients suite aux retards de livraison. Pour une entreprise industrielle, ce peut être des coûts liés à la désorganisation de la production en attendant la livraison des matières ou composants (main d'œuvre inoccupée mais payée, paiement d'heures supplémentaires ensuite pour rattraper le retard, arrêt ou fonctionnement réduit de machines, cela nuit à la productivité…).

Les hypothèses du modèle de Wilson, autres que la pénurie restent valables dans ce modèle.

(cc) BY-NC-SA Réseau CRCF - Ministère de l'Éducation nationale - http://crcf.ac-grenoble.fr

Données et variables- ce sont les mêmes que celles du modèle de Wilson auxquelles on rajoute c_p et S_p. Pour éviter les confusions, il est ajouté la lettre p en indice des variables, pour signifier « modèle avec pénurie » :

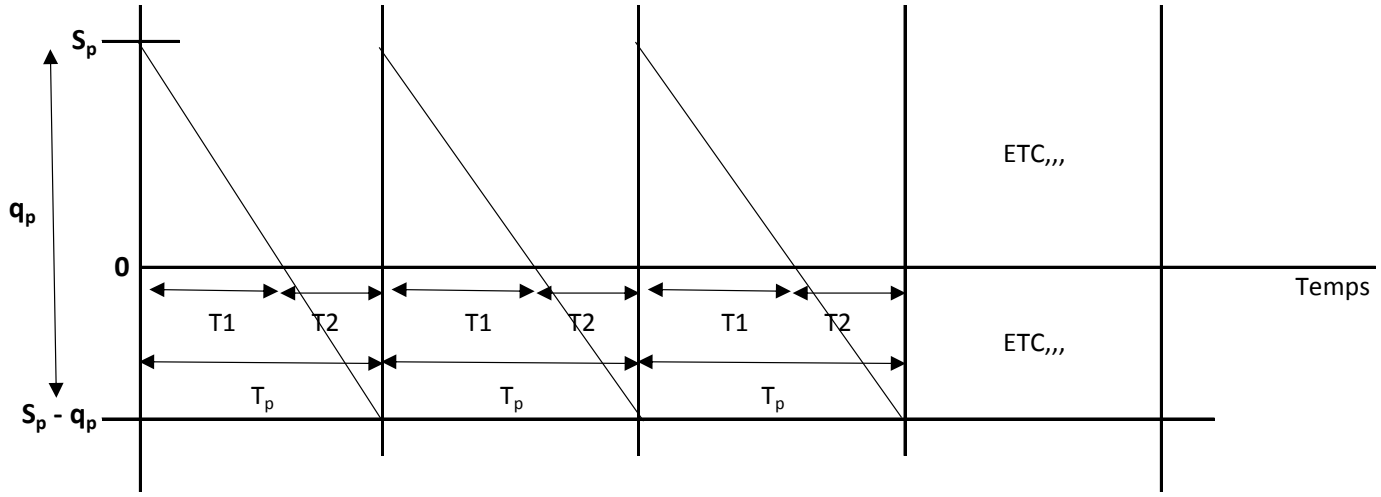
- Q = quantité consommée pendant l'unité de temps (un an, un mois…) ;
- Ca = coût de lancement d'une commande (ou d'acquisition ou de passation) ;
- s = coût par unité stockée et par unité de temps (durée de l'étude : 1 an, ou 1 mois, ou…) (*) ;
- c_p = coût de pénurie par unité manquante et par unité de temps (durée de l'étude : 1 an, ou 1 mois, ou…) (*) ;
- N_p = nombre de commandes passées pendant l'unité de temps (1 an, 1 mois…) ;
- q_p = quantité commandée à chaque réapprovisionnement ;
- T_p = durée de la période c'est-à-dire la durée qui sépare deux réapprovisionnements ;
- S_p = stock en début de période (à l'arrivée d'une commande) = stock actif optimal.

Relation entre les données et variables :

$$N = Q / q_p \qquad q = Q / N_p \qquad T_p = 1 / N_p = Q / q_p$$

<u>Remarque</u> : (*) s et Cp peuvent être remplacés par des taux applicables au prix de l'unité stockée (voir applications qui accompagneront ce document).

Dans ce modèle l'évolution du stock au cours du temps peut-être représenté par le schéma suivant :



Explication du schéma :

L'intervalle de temps T_p entre deux traits représente la période qui sépare la livraison de deux commandes successives.

La quantité nécessaire pour répondre à la demande de la période T_p est q_p. Toutefois le stock en début de période, noté S_p est inférieur à q_p, donc l'entreprise se retrouve en rupture de stock au bout du temps T1. La rupture de stock dure T2, en attendant que le stock soit de nouveau approvisionné. Comme la demande non satisfaite est servie en priorité, l'entreprise commence la période suivante avec une quantité S_p inférieure à q_p. Etc.

Pour résumer :

- T1 = durée pendant laquelle l'entreprise n'est pas en rupture de stock ;
- T2 = durée pendant laquelle l'entreprise est en rupture de stock ;
- T_p = T1 + T2 = durée qui sépare deux réapprovisionnements.

Le schéma nous permet d'écrire la fonction de coût à minimiser. Elle comprend les coûts étudiés dans le modèle de Wilson auquel s'ajoute le coût de la pénurie**. C'est une fonction à deux variables car elle dépend également du niveau de stock en début de période**.

(cc) BY-NC-SA Réseau CRCF - Ministère de l'Éducation nationale - http://crcf.ac-grenoble.fr

<u>Pour rassurer nos lecteurs</u> : l'écriture de la fonction est délicate. Nous verrons toutefois dans les applications que nous pouvons la minimiser et trouver les différentes valeurs sans qu'il soit nécessaire de l'écrire.

En effet, comme il s'agit d'une fonction de deux variables, nous admettrons les démonstrations et préciserons la méthodologie pour en déduire les résultats.

Coût total des approvisionnements = (prix ou coût d'achat) + (Coût de lancement des commandes) + (Coût de possession des stocks) + (Coût de la pénurie).

Comme pour le modèle de Wilson, le prix étant fixe (indépendant de la quantité q_p commandée à chaque réapprovisionnent), nous ne l'incluons pas. Nous garderons comme dans le modèle de Wilson, le terme de coût de gestion du stock pour appellation de cette fonction.

Par ailleurs, nous choisissons d'écrire cette fonction en fonction des variable q_p et S_p (nous aurions pu choisir N_p à la place de S_p). Nous la notons $C(q_p ; S_p)$.

Coût de gestion des stocks = $C(q_p ; S_p) = [Ca * Q/q_p] + [S_p/2 * s * T1 / T_p] + [(q_p - s_p)/2 * T2/T_p * c_p]$

Nous admettrons les résultats suivants :

Le calcul des valeurs optimales (qui minimisent le coût de gestion des stocks) nécessite le calcul d'un taux, souvent appelé de service et noté ρ (lettre grecque qui se prononce ro et qui se nomme en grecque classique rhô qui a donné r en français).

Taux de service ρ : il correspond à la proportion de temps durant laquelle l'entreprise n'est pas en rupture de stock.

Il se calcule comme suit :

$$\rho = c_p / (c_p + s)$$

<u>Remarque</u> : ρ peut également être calculé à partir des taux (voir application 6 plus bas)

Le calcul des valeurs optimales se fait à partir des valeurs du modèle de Wilson (modèle sans pénurie).

	Modèle de Wilson (sans pénurie)	**Modèle avec pénurie et demande différée**
Quantité économique (quantité commandée à chaque réapprovisionnement)	q	$q_p = q * \frac{1}{\sqrt{\rho}}$
Nombre de commandes	N	$N_p = N * \sqrt{\rho}$
Période (qui sépare deux réapprovisionnements)	T	$T_p = T * \frac{1}{\sqrt{\rho}}$
Stock actif optimal (stock en début de période)	q	$S_p = q * \sqrt{\rho}$
Coût de gestion des stocks	C(N) ou C(q)	$C_p = C * \sqrt{\rho}$
Économie réalisée (à multiplier par 100 pour l'avoir en pourcentage)		$1 - \sqrt{\rho}$

<u>Remarque</u> : ***le modèle de Wilson n'est finalement qu'un cas particulier du modèle avec pénurie et demande différée, lorsque le coût de pénurie est très grand. En effet si Cp est très grand alors le ρ = cp / (cp + s) est très proche de 1 (et donc sa racine également). Les valeurs du modèle de Wilson et du modèle avec pénurie sont sensiblement égales.***

Mathématiquement cela se démontre tout simplement en écrivant que $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{cp}{cp+s}\right)$ = 1.

(cc) BY-NC-SA Réseau CRCF - Ministère de l'Éducation nationale - http://crcf.ac-grenoble.fr

Application 6 (avec corrigé) – illustration du modèle avec pénurie et demande différée

Nous reprenons les données de l'application 2 à savoir :

Matière première	Quantité annuelle nécessaire en sac de 25 kg	Prix par 25 kg	Taux annuel de possession du stock	Coût d'une commande
	Q	p	t	Ca
Farine de blé T65	6 000	24,00 €	3%	60,00 €

Les hypothèses du modèle de Wilson sont supposées vérifiées.

Le taux de possession du stock s'applique sur la valeur du stock.

Il apparait qu'en cas de rupture de stock qui entraîne un retard dans la production du fournil de Rabelais (qui rappelons-le est une boulangerie-pâtisserie industrielle), les clients acceptent de patienter pour la livraison d'une partie de leur commande (les produits élaborés avec la farine de blé T65). Les clients demandent toutefois une contrepartie sous forme de remise.

La pénurie (la rupture de stock) présente donc un coût **mensuel** estimé à 1 % de la valeur des articles manquants.

Votre mission : déterminez la politique d'approvisionnement optimale.

Proposition de réponse

Nous avons déjà calculé les valeurs optimales dans le cas où la pénurie n'est pas admise (modèle de Wilson) : voir la correction proposée de l'application 2.

Il nous faut désormais calculer le taux de service $\rho = c_p / (c_p + s)$ ou avec les taux directement.

Attention : les données doivent être exprimées dans la même unité de temps. Le taux mensuel de 1 % doit être ramené à l'année soit 12 * 1 % = 12 % (car dans le tableau, t = 3 % est annuel).

- Calcul de ρ en utilisant les taux : **ρ = 12 / (3+12) = 0,80**
- Calcul ρ de en utilisant Cp et s :
  - C_p = 12 % * 24 (12 % du prix pour un sac) soit C_p = 2,88 € par an et par sac ;
  - s = 3 % * 24 (3 % du prix pour un sac) soit s = 0,72 € par an et par sac ;
  - donc **ρ = 2,88 / (2,88 + 0,72) = 0,80**

Les deux résultats sont bien sûr identiques. Si nous ne connaissons pas le prix unitaire, seule la première méthode est possible.

Calculs qui minimisent le coût de gestion des stocks	**Modèle de Wilson (sans pénurie)**	**Modèle avec pénurie et demande différée avec ρ = 0,80**
Quantité économique (quantité commandée à chaque réapprovisionnement)	q = 1 000 sacs	**$q_p = q * \frac{1}{\sqrt{\rho}}$ = 1 118 sacs**
Nombre de commandes	N = 6 commandes	**$N_p = N * \sqrt{\rho}$ = 5,37 commandes**
Période (qui sépare deux réapprovisionnements)	T = 2 mois	**$T_p = T * \frac{1}{\sqrt{\rho}}$ = 2,24 mois soit 67 jours environ**
Stock actif optimal (stock en début de période)	q = 1 000 sacs	**$S_p = q * \sqrt{\rho}$ = 894 sacs**
Coût de gestion des stocks	C(N) ou C(q) = 720 €	**$C_p = C * \sqrt{\rho}$ = 644 €**
Économie réalisée (à multiplier par 100 pour l'avoir en pourcentage)		**$1 - \sqrt{\rho}$ = 10,56 % (*)**

(*) Si les clients acceptent d'être livrés en retard, cela réduit le coût de gestion des stocks.

(cc) BY-NC-SA Réseau CRCF - Ministère de l'Éducation nationale - http://crcf.ac-grenoble.fr

Nous pouvons également compléter les données par le calcul de T1 et T2 :

- T1 est la durée pendant laquelle l'entreprise n'est pas en rupture de stock. À chaque réapprovisionnement, la quantité livrée est de 1 118 sacs (valeur de q_p). Mais une partie sert à pallier la rupture de stock de la période précédente, donc le stock utile pour la période est de 894 sacs (valeur se S_p). Autrement dit sur un besoin de 1 118 sacs pour la période, seuls 894 sont disponibles soit une proportion de 894 / 1 118 = 0,8 (aux arrondis près), il s'agit du taux de service. Nous avons donc **T1 = 0,8 * T_p = 0,8 * 2,24 = 1,792 mois (environ 54 jours**, obtenir en multipliant 1,792 par 30 jours).
- T2 est la durée de pénurie : **T2 = T_p – T1 = 2,24 – 1,792 = 0,448 mois (environ 13 jours)**.

Remarque (pour aller plus loin) : la démonstration peut se faire à partir du graphique et le théorème de la conservation des rapports de projection (le célèbre théorème de Thalès). Nous pouvons écrire que : S_p / q_p = T1 / T_p et donc que **T1 = T_p * Sp / qp**.

Et on peut facilement montrer que **T1 = ρ * T_p**.

Remarque : l'appellation taux de service pour désigner ρ ne fait pas l'unanimité chez les auteurs. Sans vouloir trancher ce débat, nous pouvons toutefois faire remarquer que ce terme a un sens car il représente finalement la proportion du temps pendant laquelle l'entreprise n'est pas en rupture de stock et donc elle peut « servir le client ». Le taux de pénurie peut alors désigner la proportion du temps pendant laquelle l'entreprise est en rupture de stock, et égal à 1-ρ.

Limites du modèle avec pénurie

L'application 6 montre toutes les limites du modèle. D'une part le nombre de commandes obtenue, 5,37 par an ne peut être qu'un résultat théorique qui n'a pas beaucoup de sens, il faudra faire un nombre entier de commandes (5 ou 6) : donc cela remet en cause toutes les autres valeurs calculées.

Pour le cas étudié, il est peu probable que l'attente des clients se renouvelle dans le temps, et, soit ils prendront des produits de substitutions qui se rapprochent, soit ils changeront de fournisseurs.

La perte de l'image de marque est fréquente en cas de rupture de stock, aussi il est peu probable qu'une entreprise adopte ce modèle de gestion de ses stocks.

VII. La gestion des stocks en juste à temps

Lorsque la demande est irrégulière, les modèles de gestion des stocks précédents sont inopérants.
Auquel cas il faut envisager d'autres méthodes, la gestion des stocks en juste à temps par la méthode Kanban peut-être l'une d'entre-elles. Nous verrons ensuite dans le point VIII, l'utilisation des probabilités.

Comme le précise le programme du DCG ne seront évoqués que les principes généraux de la méthode kanban.

Avant de résumer les principes généraux, quelques ressources que vous pouvez consulter :

Voici l'adresse d'un site Web qui résume bien les principes, ainsi que les avantages et inconvénients de la méthode Kanban : https://www.planzone.fr/blog/quest-ce-que-la-methodologie-kanban

De nombreuses vidéos existent sur le sujet, voici quelques liens intéressants :
https://www.youtube.com/watch?v=1CqKOhfAS0w
https://www.youtube.com/watch?v=CmVPY7-X2YI
https://www.youtube.com/watch?v=epPSOMMSS1g
https://www.youtube.com/watch?v=ELUScDGVkfQ

(cc) BY-NC-SA Réseau CRCF - Ministère de l'Éducation nationale - http://crcf.ac-grenoble.fr

Objectif et grands principes

La méthode Kanban est née dans l'industrie automobile japonaise. Elle a été créée par Taiichi Ono pour Toyota en 1950.

L'objectif était d'optimiser la capacité de production afin d'être compétitive face aux entreprises américaines.

La méthode Kanban s'inscrit dans l'amélioration continue des processus de production afin de permettre une gestion de la production sans gaspillage (Lean management).

Nous rappelons que le « Lean management » cherche à :

- Réduire les coûts de production ;
- Éviter la surproduction ;
- Diminuer les délais ;
- Produire avec la meilleure qualité possible.

Nous retrouvons le triptyque évoqué dans l'introduction de ce document : « coût, qualité, délai ».

Kanban veut dire étiquette.

➔ Dans l'industrie, « l'approche Kanban est une méthode de gestion du stock qui permet de produire sur demande. L'objectif principal étant d'arriver à équilibrer la production et la demande. ».

➔ La gestion des stocks à partir de la méthode Kanban permet de commander automatiquement en fonction du niveau de stock et des besoins. L'étiquette se présente souvent sous la forme d'un code barre et contient les différentes informations permettant de passer commande.
Le système permet en principe (hors aléas) d'éviter à la fois le sur stockage et les ruptures de stock.

(Gestion des stocks en avenir aléatoire : page suivante)

(cc) BY-NC-SA Réseau CRCF - Ministère de l'Éducation nationale - http://crcf.ac-grenoble.fr

VIII. La gestion des stocks en avenir aléatoire

De nombreux modèles existent. Nous n'étudierons que ceux évoqués par le programme de DCG.

Objectif : il s'agit de rechercher le niveau optimal du stock en début de période que nous noterons S.

La période est la durée qui sépare deux réapprovisionnements (suite à un achat ou à une production mise en stock).

Cette période peut être égale à un jour, plusieurs jours, un mois, un trimestre, un an, etc.

Nous partirons d'exemples pour développer cette partie. Il s'agit d'appliquer les lois de probabilité étudiées dans le chapitre éponyme. Nous éviterons de théoriser inutilement.

Le taux de service – il peut être défini comme suit en matière de gestion des stocks :

Le taux de service correspond à la probabilité attendue de ne pas être en rupture de stock.

« Le taux de service peut également être défini comme la probabilité d'être en mesure de répondre à la demande des clients sans commande en souffrance ni vente perdue. »

Il est d'usage de noter **ρ** (rho) le taux de service (raccourci clavier : ALT+ 961).

La probabilité de rupture de stock est donc égale à 1 – ρ et souvent notée α (raccourci clavier : ALT+ 945).

Les corrigés indicatifs sont proposés à la fin de ce document.

Application 1

La demande mensuelle d'un produit est une variable aléatoire notée D et qui suit une loi normale d'espérance (moyenne) 200 000 et d'écart-type 40 000.

TAF : Calculer le niveau optimal des stocks en début de mois (début de période) si l'on désire atteindre un taux de service de ρ = 90 %.

Loi normale et stock de sécurité.

Faisons l'hypothèse que la demande suit une loi normale de moyenne m et d'écart-type σ sur une période de temps donnée (un mois, un trimestre, un an, etc.).

Si le stock de début de période est m (la moyenne) alors la probabilité d'être en rupture avant la fin de période est de 0,5 (à noter qu'un taux de service de 50 % ne signifie donc pas qu'un client sur deux est satisfait ! Il signifie simplement qu'en moyenne une fois sur deux nous serons en rupture de stock, mais cela ne donne pas le rapport entre le nombre de clients satisfaits et le nombre total de client.

Si nous voulons augmenter le taux de service au-delà de 50 % (donc diminuer la probabilité d'être en rupture de stock), il faut augmenter notre stock en début de période. **Il est d'usage d'appeler la différence entre le stock en début de période et la moyenne m, le stock de sécurité** :

$$\boxed{\text{Stock de sécurité} = S - m}$$

(On rappelle que S est le niveau de stock en début de période).

Remarque : ***il est également possible d'appliquer cette règle avec la loi de Poisson. Le stock de sécurité sera alors défini comme la différence entre le stock de début de période et le paramètre λ de la loi de Poisson (qui correspond à la moyenne).***

Application 2

La demande mensuelle d'un produit est une variable aléatoire notée D et qui suit une loi normale d'espérance (moyenne) 30 000 et d'écart-type 1 500.

TAF : Calculer le niveau optimal des stocks en début de mois (début de période) si l'on désire atteindre un taux de service de ρ = 97,5 %. Préciser le stock de sécurité tel que défini ci-dessus.

(cc) BY-NC-SA Réseau CRCF - Ministère de l'Éducation nationale - http://crcf.ac-grenoble.fr

Application 3

La demande hebdomadaire d'un produit est une variable aléatoire notée D et qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 8$. Nous rappelons que λ correspond à la moyenne (espérance mathématique) pour la loi de Poisson.

TAF : Calculer le niveau optimal des stocks en début de semaine (début de période) si l'on désire atteindre un taux de service de $\rho = 95$ %. Préciser le stock de sécurité tel que défini dans l'encadré.

Application 4

La période séparant deux réapprovisionnements successifs est de trois mois. La demande hebdomadaire d'un produit est une variable aléatoire notée D et qui suit une loi normale d'espérance (moyenne) m = 1 500 et d'écart-type $\sigma = 300$.

TAF : calculer le taux de service et la probabilité de rupture de stock si le stock de sécurité s'élève à :

1. 150 ;
2. σ ;
3. 2σ ;
4. 3σ.

Corrigés indicatifs des applications 1 à 4 (avenir aléatoire)

Corrigé application 1

Nous savons que D ➔ N(200 000 ; 40 000)

Nous cherchons le niveau de stock S tel que la probabilité que la demande soit inférieure ou égale à S soit égal à 90 % (signification : le niveau des stocks permettra de répondre dans 90 % des cas à la demande).

Nous avons donc : P(D <= S) = 0,90 avec D ➔ N(200 000 ; 40 000)

Une fois le problème posé vous avez la possibilité d'utiliser votre calculatrice pour trouver la valeur de S.

Vous pouvez également utiliser la loi normale centrée réduite (utilisation de la table que vous trouverez à l'avant dernière page de ce document), solution que nous développons ci-après :

Nous avons : P(D <= S) = P[(D – 200 000) / 40 000 <= (S - 200 000) / 40 000] = P(T <= t)

Où T est la loi normale centrée réduite et t = (S - 200 000) / 40 000

On cherche t dans la table de la loi normale centrée réduite tel que : P (T <= t) = 0,90

Nous trouvons t = 1,28 (environ). Or t = (S - 200 000) / 40 000 donc S = 200 000 + 1,28 * 40 000 = **251 200**.

Conclusion :

Le niveau optimal des stocks en début de mois (début de période) pour atteindre un taux de service de $\rho = 90$ % est de 251 200 unités.

Corrigé application 2

Nous savons que D ➔ N(30 000 ; 1 500)

Pour trouver le niveau optimal des stocks en début de mois (début de période) pour atteindre un taux de service de $\rho = 97{,}5$ %, nous utiliserons le même raisonnement que dans l'application 1. Nous notons S ce niveau optimal.

Nous cherchons S tel que : P(D <= S) = 0,975 avec D ➔ N(30 000 ; 1 500). S peut-être trouvé avec la calculatrice.

Si nous utilisons la loi normale centrée réduite, on cherche t tel que P (T <= t) = 0,975 (avec T, la loi normale centrée réduite et t = (S - 30 000) / 1 500. La table nous donne t= 1,96. Donc **S = 30 000 + 1,96 * 1500 = 32 940 unités**.

Avec la définition de l'encadré du **stock de sécurité**, celui-ci est égal à : **32 940 – 30 000 = 2 940 unités**. **On notera que ce stock de sécurité correspond à t σ = 1,96 * 1500**.

(cc) BY-NC-SA Réseau CRCF - Ministère de l'Éducation nationale - http://crcf.ac-grenoble.fr

Corrigé application 3

Vous disposez d'extraits de la loi de Poisson à la dernière page de ce document (pour le cas où vous n'utilisez pas la calculatrice pour trouver le résultat après avoir formalisé le problème).

Nous savons que D ➔ $\mathcal{P}(8)$

Nous cherchons le niveau de stock S tel que la probabilité que la demande soit inférieure ou égale à S soit au moins égal à 95 % (signification : le niveau des stocks permettra de répondre dans au moins 95 % des cas à la demande). Nous cherchons donc S tel que P(D <= S) = 0,95 avec D ➔ $\mathcal{P}(8)$ (loi de Poisson de paramètre $\lambda = 8$).

La solution la plus simple est d'utiliser la table de la loi de Poisson, fonction cumulative (fonction de répartition). Nous remarquons dans la table, dans la colonne où $\lambda = 8$ que : P(S <= 12) = 0,9362 et P(S <= 13) = 0,9658.

Nous retiendrons donc S = 13 unités car nous devons atteindre un taux de service au moins égal à 0,95. (1).

(1) Nous rappelons que la loi de Poisson est une loi de probabilité dite discrète, c'est-à-dire que les valeurs de la variable sont nécessairement des entiers.

Avec la définition de l'encadré du **stock de sécurité**, celui-ci est égal à : **13 – 8 = 5 unités**.

Corrigé application 4

Nous retenons la définition du stock de sécurité précisé dans l'encadré plus haut.

Le taux de service ρ est tel que **P (D < m+stock de sécurité) = ρ avec m = 1500 et D ➔ N(1 500 ; 300)**

Stock de sécurité	Niveau de stock en début de période m + stock de sécurité	t = (S - 1500 / 300)	P(T <= t) Taux de sercice ρ
150	1 650	0,50	**0,69150**
300	1 800	1,00	**0,84130**
600	2 100	2,00	**0,97720**
900	2 400	3,00	**0,99865**

Nous remarquons bien évidemment que plus le stock de sécurité est élevé plus le taux de service est proche de 1 (100 %). Dès l'instant où le stock de sécurité représente trois écarts-types, le taux est quasi égal à 100 % (0,99865).

(cc) BY-NC-SA Réseau CRCF - Ministère de l'Éducation nationale - http://crcf.ac-grenoble.fr

Table de la loi normale centrée réduite

Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite : $P(T \leq t) = \pi(t)$

t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\pi(t)$	0,99865	0,99904	0,99931	0,99952	0,99966	0,99976	0,99984	0,99992	0,99997	0,99999

(cc) BY-NC-SA Réseau CRCF - Ministère de l'Éducation nationale - http://crcf.ac-grenoble.fr

Extrait de la loi de Poisson – Fonction de distribution

Extrait des tables de la loi de Poisson

Valeurs de $P(X = k) = e^{-np}\dfrac{(np)^k}{k!} = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ $(\lambda = np)$

k	$\lambda = 1$	$\lambda = 1{,}5$	$\lambda = 2$	$\lambda = 3$	$\lambda = 4$	$\lambda = 5$	$\lambda = 6$	$\lambda = 7$	$\lambda = 8$	$\lambda = 9$	$\lambda = 10$
0	0,368	0,223	0,135	0,050	0,018	0,007	0,002	0,001	0,000	0,000	0,000
1	0,368	0,335	0,271	0,149	0,073	0,034	0,015	0,006	0,003	0,001	0,000
2	0,184	0,251	0,271	0,224	0,147	0,084	0,045	0,022	0,011	0,005	0,002
3	0,061	0,126	0,180	0,224	0,195	0,140	0,089	0,052	0,029	0,015	0,008
4	0,015	0,047	0,090	0,168	0,195	0,176	0,134	0,091	0,057	0,034	0,019
5	0,003	0,014	0,036	0,101	0,156	0,176	0,161	0,128	0,092	0,061	0,038
6	0,001	0,004	0,012	0,050	0,104	0,146	0,161	0,149	0,122	0,091	0,063
7	0,000	0,001	0,003	0,022	0,060	0,104	0,138	0,149	0,140	0,117	0,090
8		0,000	0,001	0,008	0,030	0,065	0,103	0,130	0,140	0,132	0,113
9			0,000	0,003	0,013	0,036	0,069	0,101	0,124	0,132	0,125
10				0,001	0,005	0,018	0,041	0,071	0,099	0,119	0,125
11				0,000	0,002	0,008	0,023	0,045	0,072	0,097	0,114
12					0,001	0,003	0,011	0,026	0,048	0,073	0,095
13					0,000	0,001	0,005	0,014	0,030	0,050	0,073

Extrait de la loi de Poisson – Fonction de répartition (fonction cumulative)

Loi de Poisson Fonction cumulative (suite) $P(X \leqslant K)$

K	$\lambda = 5{,}5$	$\lambda = 6{,}0$	$\lambda = 6{,}5$	$\lambda = 7{,}0$	$\lambda = 7{,}5$	$\lambda = 8{,}0$	$\lambda = 8{,}5$	$\lambda = 9{,}0$	$\lambda = 9{,}5$
0	0,0041	0,0025	0,0015	0,0009	0,0006	0,0003	0,0002	0,0001	0,0001
1	0,0266	0,0174	0,0113	0,0073	0,0047	0,0030	0,0019	0,0012	0,0008
2	0,0884	0,0620	0,0430	0,0296	0,0203	0,0138	0,0093	0,0062	0,0042
3	0,2017	0,1512	0,1118	0,0818	0,0591	0,0424	0,0301	0,0212	0,0149
4	0,3575	0,2851	0,2237	0,1730	0,1321	0,0996	0,0746	0,0550	0,0403
5	0,5289	0,4457	0,3690	0,3007	0,2414	0,1912	0,1496	0,1157	0,0885
6	0,6860	0,6063	0,5265	0,4497	0,3782	0,3134	0,2562	0,2068	0,1649
7	0,8095	0,7440	0,6728	0,5987	0,5246	0,4530	0,3856	0,3239	0,2687
8	0,9044	0,8472	0,7916	0,7291	0,6620	0,5925	0,5231	0,4557	0,3918
9	0,9462	0,9161	0,8774	0,8305	0,7764	0,7166	0,6530	0,5874	0,5218
10	0,9747	0,9574	0,9332	0,9015	0,8622	0,8159	0,7634	0,7060	0,6453
11	0,9890	0,9799	0,9661	0,9466	0,9208	0,8881	0,8487	0,8030	0,7520
12	0,9955	0,9912	0,9840	0,9730	0,9573	0,9362	0,9091	0,8758	0,8364
13	0,9983	0,9964	0,9929	0,9872	0,9784	0,9658	0,9486	0,9261	0,8981
14	0,9994	0,9986	0,9970	0,9943	0,9897	0,9827	0,9726	0,9585	0,9400

(cc) BY-NC-SA Réseau CRCF - Ministère de l'Éducation nationale - http://crcf.ac-grenoble.fr