**Centre de Ressources
Comptabilité Finance**

« Il faut favoriser la compréhension des choses aux dépens de leur mise en équation »

Stephen Hawking (1942 – 2018)

Brèves réponses aux grandes questions

Lycée MARIE CURIE

Avenue du 8 mai 1945 - BP 348

38435 ECHIROLLES cedex

[**http://crcf.ac-grenoble.fr/**](http://crcf.ac-grenoble.fr/)

**2.3 La prise en compte de données aléatoires**

**L’approche des probabilités par les statistiques – Introduction aux probabilités**

1. Utiliser les statistiques pour prévoir le futur

Dans le cadre de leur gestion, les entreprises souhaitent maîtriser le futur (par exemple anticiper les ventes pour répondre au mieux au marché, en fonction de ses capacités de production et de sa structure de coûts).

Le futur est par essence aléatoire, l’entreprise peut toutefois utiliser des données passées pour l’appréhender.

Pour illustrer ce que nous venons de préciser, nous partirons d’un exemple.

Application 1 – L’EARL des Terres Noires

Parmi ses activités, l’EARL (Exploitation Agricole à Responsabilité Limitée) des Terres Noires élève en plein air des volailles BIO qu’elle vend sur place ou sur les marchés. Chaque début de semaine sont abattues les volailles qui seront mises à la vente dans la semaine. Toute volaille non vendue dans la semaine est perdue et envoyée à l’équarrissage (destruction de la volaille). Pour limiter au maximum les pertes, la société fait référence aux ventes passées (statistiques de ventes) pour déterminer le nombre de volailles à abattre en début de semaine.

Au cours des 50 semaines précédentes, les exploitants ont relevé les ventes suivantes :



Travail à faire : (vous disposez des annexes 1 à 3 en fin de document)

1. Donner une lecture (interprétation) du tableau.
2. Calculer pour chaque quantité vendue (« les xi ») la fréquence, c’est-à-dire le rapport (nombre de semaines) / 50 = ni / 50 (50 étant le nombre total d’observations).
3. Quelle utilisation peut-on faire de ces fréquences ?

Le coût de revient moyen d’une volaille proposée à la vente (abattue) est d’environ 8 euros. Le prix de vente moyen est 22 euros. Le coût de l’équarrissage est d’un euro par volaille.

Travail à faire :

1. Quel est le gain réalisé sur une volaille vendue ?
2. Quelle est la perte réalisée sur une volaille envoyée à l’équarrissage ?
3. Interpréter le tableau en annexe 3. Quel peut-être l’intérêt de celui-ci ?
4. Compléter les tableaux en annexes 1 à 3 (utilisation conseillée d’un tableur).
5. Que peut-on conseiller à l’EARL sur le nombre de volailles à abattre chaque semaine ?
6. Que pensez-vous de l’utilisation des statistiques de ventes pour prévoir les ventes futures ?
7. Des statistiques aux probabilités

**Précision : (un peu d’histoire)**

Il ne s’agit pas ici de faire un cours théorique de probabilité, mais d’apporter toutefois une certaine rigueur aux raisonnements qui font référence à cet outil mathématique. Cette rigueur est nécessaire à la compréhension et à la réutilisation de cet outil dans le domaine de la gestion.

Il est intéressant de rappeler que si les probabilités sont un sujet d’étude ancien pour les mathématiciens, la modélisation que nous connaissons est finalement assez récente. Elle est l’œuvre du mathématicien russe A. N. Kolmogorov (1903-1987) qui précisait : "La théorie des probabilités en tant que discipline mathématique peut et doit être développée à partir d'axiomes de la même manière qu'en Géométrie et en Algèbre."

« La théorie des probabilités concerne la modélisation du hasard et le calcul des probabilités ». C’est ce que nous avons tenté de faire dans le cas des ventes de volailles.

Nous avons retenu des analyses sur 50 semaines pour conclure que les ventes de volailles s’étalaient de 15 à 20 par semaine. C’est ce qu’on peut appeler l’univers des possibles ou des résultats possibles. En probabilité cet univers des possibles est généralement noté : **Ω**. L’univers des possibles est un ensemble ici composé de 16 éléments (15, 16, 17,…,30).

Pour chaque élément ou résultat possible, nous avons calculé une fréquence d’apparition au cours des 50 semaines. Ces fréquences peuvent constituer la probabilité de chacune des ventes. Par exemple, au cours des 50 semaines, on a vendu 5 fois 20 volailles, ce qui représente un pourcentage de (5/50) soit 10 %. Autrement dit, dans le futur, si tout reste en l’état, on peut s’attendre à ce qu’en moyenne dans 10% des semaines étudiées nous vendrons 20 volailles. En termes de probabilité on écrit que la probabilité de vente de 20 volailles en une semaine est de 0,1 (10 %). Cela peut se noter P(20) = 0,1 ou 20 désigne le nombre de volailles vendues en une semaine (la théorie utilise le terme évènement, ici P(20) est la probabilité de l’évènement vendre 20 volailles en une semaine).

Par construction la somme des fréquences est égale à 1 (ou 100 %). Il en est de même donc pour les probabilités. La somme des probabilités de chaque résultat possible est égale à 1.

**Résumons :**

*Pour définir une probabilité, il suffit de connaître*

* *l’ensemble des résultats élémentaires possibles (univers des possibles) ;*
* *la probabilité de chaque résultat (évènement) élémentaire ;*

*et de vérifier que la somme des probabilités de chaque résultat (évènement) élémentaire est bien égale à 1.*

Application 2 – la pêche aux canards

Le magasin Au bon marché désire réaliser une animation commerciale à l’occasion du printemps.

Le directeur propose de faire une pêche aux canards à destination des enfants de moins de 8 ans. Le magasin achète le matériel nécessaire dont 10 canards numérotés de 1 à 10 sous ceux-ci (lors de la pêche, le numéro n’est donc pas visible). Chaque canard a la même chance d’être tiré.

À chaque numéro sera attribué un lot différent (un sachet de chocolats pour le 1, un lot de biscuits pour le 2, etc.). Un même lot peut donc être gagné plusieurs fois.

Travail à faire :

1. Chaque enfant pêche un seul canard. Quel est l’univers des possibles (résultats possibles) lors du tirage d’un canard ?
2. Quelle est la probabilité de pêcher le canard numéro 5. Quelle est l’hypothèse que vous utilisez pour faire ce calcul ? La somme des probabilités est-elle bien égale à 1 ?
3. Si chaque enfant peut pêcher deux canards, quel est alors l’univers des possibles (le premier canard tiré n’est pas remis à l’eau) ? Les pêches sont-elles indépendantes ?
4. Même question si le premier canard est remis à l’eau et que l’enfant ne voit pas où il a été remis. Les pêches sont-elles indépendantes ?

Application 3 – le jeu de la pointe du crayon

Vous disposez d’une feuille cartonnée carrée de 20 cm de coté. Sur cette feuille, vous dessinez un carré de 5 cm de coté. Nous obtenons la situation suivante :



Vous posez la feuille sur le sol, à une hauteur de un mètre cinquante, vous laissez tomber au hasard (sans viser) sur la feuille un crayon de bois (la mine est solide). Il apparait sur la feuille un point noir.

Vous répétez la même opération 200 fois.

Il apparait sur la feuille 200 points noirs, dont 10 dans le carré de 5 cm de coté.

Travail à faire :

1. Calculer en cm² la surface de la feuille puis celle du carré de 5 cm de coté.
2. Calculer le rapport suivant : (surface du carré de 5 cm de coté) / (surface de la feuille).
3. Que représente ce rapport en termes de probabilité ? Quel est l’univers des possibles (ensemble des résultats possibles) ? Quelle est la particularité de cet univers (les résultats sont-ils dénombrables) ?
4. Calculer le rapport suivant : (nombre de points noirs dans le carré de 5 cm) / 200. Commenter le résultat obtenu.

**Pour approfondir** : un naturaliste, mathématicien, biologiste, cosmologiste, philosophe et écrivain français a calculé le nombre π en utilisant les probabilités, il s’agit de Buffon. A partir de recherches sur Internet, vous trouverez facilement des explications sur l’expérience qu’il a menée. Ce problème est connu sous le nom des aiguilles de Buffon.

1. L’équiprobabilité et le dénombrement (permutations, arrangements et combinaisons)

*Dans de nombreux problèmes de probabilité, chaque résultat de l’univers des possibles (on parle d’évènement élémentaire) a une probabilité équivalente de réalisation. On utilise le terme d’équiprobabilité pour désigner cette situation.* ***Les formules de dénombrement ne sont pas au programme du DCG, elles sont abordées précisées pour la compréhension****.*

**Exemple** :

Dans le cas de notre pêche aux canards (voir application 2), chaque canard a la même probabilité d’être pêché, les tirages sont équiprobables. Cette probabilité est de 1 / 10 soit 0,1 ou 10 % car il y a 10 canards. Cette hypothèse n’est vraie que si les canards sont identiques et accessibles de la même manière.

***Lorsqu’il y a équiprobabilité***, pour calculer la probabilité d’un évènement composé d’évènements élémentaires, il suffit de faire le rapport :

**(Nombre de résultats favorable) / (Nombre de résultats total de l’univers des possibles)**

**Exemple** :

Dans le cas de notre pêche aux canards (voir application 2), quelle est la probabilité de tirer un canard qui porte un numéro pair ? C’est l’objectif d’un enfant qui préfère les lots des canards qui portent un nombre pair.

Les numéros pairs sont 2, 4, 6, 8 et 10. Il y a donc 5 résultats favorables à l’évènement « tirer un canard qui porte un numéro pair ».

Le nombre de résultats total de l’univers est de 10 (10 canards, donc 10 numéros).

La probabilité est donc de (5 / 10) soir ½ ou 0,5. Autrement dit, une chance sur deux.

**Résumons** : en situation d’équiprobabilité, calculer une probabilité revient à faire du dénombrement.

***Nous allons donc étudier dans ce qui suit quelques notions sur le dénombrement***. Cette partie sera très utile pour comprendre notamment les calculs avec la loi binomiale, lors de l’étude des lois de probabilité.

***Nous partirons d’applications pour définir les termes et généraliser les formules.***

Application N° 4 – L’important c’est que l’ensemble des tâches soit assuré !

Votre entreprise participe à un salon commercial au cours duquel vous pourrez présenter les produits commercialisés. Vous disposez d’un stand nu à décorer. Vous êtes chargé d’organiser cette participation au salon. Vous serez aidé par 3 salarié-e-s. Quatre tâches, notées T1 à T4 sont à réaliser avant le salon. Vous devez répartir ces 4 tâches entre les 3 salariés et vous-même, à raison d’une seule tâche par personne.

Travail à faire :

Si vous répartissez les tâches au hasard, combien y a-t-il de possibilités différentes pour répartir ces 4 tâches ?

**Généralisons** : le problème précédent consiste à permuter 4 éléments tous différents. Pour généraliser le calcul, nous appelons n ce nombre d’élément.

**Le nombre de permutations de n élément est factorielle n et s’écrit :**

**n ! = n x (n-1) x (n-2) x……x 1**

**À noter que par convention (et cohérence mathématique) 0! = 1**

Application N° 5 – l’organisation de la production

Votre société produit sur commande. Demain est une journée bien chargée, puisque vous devez assurer la production de trois commandes.

Vous avez reçu sept commandes de sept clients différents. Les temps de production de chaque commande sont sensiblement équivalents. Les commandes sont notées C1, C2, …, C7.

Vous devez préparer le programme de production (c’est-à-dire choisir les commandes qui seront produites) qui sera communiqué dès ce soir au responsable de production. L’ordre de production dans la journée est important car parfois, la production de la dernière commande n’est pas achevée en fin de journée. Et donc cela peut conduire à des retards dans la livraison au client (dès le planning de production achevé, la logistique pour la livraison est mise en œuvre).

Travail à faire

Combien y a-t-il de possibilités de choix ordonnés de trois commandes parmi les sept ? (un choix est par exemple C1, C2 et C3 ou encore C4, C2 et C5) etc.).

**Généralisons** : le problème précédent consiste à choisir 3 éléments tous différents parmi 7, l’ordre lors du choix étant important. On utilise le terme d’arrangement, pour désigner une disposition ordonnée de 3 éléments choisis parmi 7.

*Pour généraliser le calcul, nous appelons p le nombre d’éléments à choisir et n le nombre total d’éléments.*

**Le nombre d'arrangements de p éléments choisis parmi n est noté, il se calcule de la façon suivante :**

** =** $\frac{n !}{\left( n-p \right)!}$ **= n x (n-1) x (n-2) x ………x (n-p+1)**

Application N° 5 (suite) – l’organisation de la production

Nous reprenons les données de l’application 5. Vous estimez cette fois que le temps nécessaire pour fabriquer les 3 commandes est suffisant et que vous pourrez aisément terminer le travail dans la journée. Vous interrogez donc sur le nombre de possibilités de choisir les trois commandes parmi les sept, sans vous soucier de l’ordre de production.

Travail à faire

Combien y a-t-il de possibilités de choix non ordonnés de trois commandes parmi les sept ? (Une combinaison C1, C2 et C3 est équivalente à une combinaison C2, C1 et C3 par exemple).

Application N° 6 – le panier gourmand de la Charente Maritime

Un magasin de la Rochelle vend notamment des spécialités de la Charente Maritime. Le nombre de spécialités vendues est de 15.

Un panier gourmand proposé au prix de 60 € comportent 8 spécialités de la Charente Maritime toutes différentes. Le client choisit la composition du panier.

Travail à faire

Combien de paniers différents peut-on constituer (les 8 spécialités différentes sont choisies parmi les 15) ?

**Généralisons** : le problème précédent consiste à choisir 3 éléments tous différents parmi 7, l’ordre lors du choix n’étant pas important. On utilise le terme de combinaison, pour désigner une disposition non ordonnée de 3 éléments choisis parmi 7.

*Pour généraliser le calcul, nous appelons p le nombre d’éléments à choisir et n le nombre total d’éléments.*

**Le nombre de combinaisons de p éléments pris parmi n éléments, noté ou**$ \left(\genfrac{}{}{0pt}{}{n}{p}\right)$**, il se calcule de la façon suivante :**

**Ou** $\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{n}{p}\right) $**=** $\frac{n !}{p !\left( n-p \right)!}$ **=  /** $p !$

1. Indépendance et probabilités

L’indépendance en matière de probabilité est importante et même fondamentale dans certains cas.

Pour expliquer cette notion, reprenons notre pêche aux canards. Les enfants ont le droit de pêcher deux canards. La première condition pour qu’il y ait indépendance entre les deux pêches est que le canard soit bien sûr remis dans l’eau après la première. Il faut qu’ensuite l’enfant n’ait pas repéré le premier canard tiré, auquel cas la probabilité de pêcher le même canard au second tirage n’est pas influencée par la première pêche.

**Quel est l’intérêt de l’indépendance ?**

***L’hypothèse d’indépendance permet de faciliter les calculs car les probabilités peuvent se multiplier.***

Reprenons l’exemple de notre pêche aux canards. Posons-nous la question suivante : *quelle est la probabilité de tirer deux fois le canard numéroté 1 si les conditions d’indépendance décrites précédemment sont vérifiées ?*

Réponse : il y a dix canards qui ont une équiprobabilité d’être pêché. La probabilité de tirer le numéro 1 est donc de 1/10 soit 0,1. Si les conditions d’indépendance sont vérifiées, La probabilité de tirer le numéro 1 à la seconde pêche est également de 1/10 soit 0,1. Il est démontré que la probabilité de tirer deux fois le canard numéroté 1 est égal au produit des probabilités pour chaque pêche soit 1/10 x 1/10 = 0,1 x 0,1 = 1/100 ou 0,01. C’est une probabilité très faible.

Pour le montrer, nous pouvons dresser la liste des résultats possibles lors de la pêche de deux canards avec remise :



Il y donc au total 100 pêches avec remise différentes de deux canards. Il y a équiprobabilité de chaque tirage. En appliquant la règle **(Nombre de résultats favorable) / (Nombre de résultats total de l’univers des possibles)**, cela nous donne 1/100 = 0,01.

**Résumons** : en situation d’indépendance, calculer une probabilité revient très souvent à faire le produit des probabilités de réalisation de chaque évènement.

Prenons l’exemple de 3 évènements aléatoires indépendants notés A, B et C. La probabilité de chaque évènement est noté respectivement PA, PB et PC. La probabilité que les trois évènements soient réalisés conjointement est PA x PB x PC.

L'indépendance entre deux événements n'est pas toujours aisée à vérifier, c’est pourtant une condition nécessaire pour appliquer certains résultats mathématiques (voir notamment la notion de distribution d’échantillonnage).

Annexe 1 : tableau de calcul du nombre de volailles vendues



Annexe 2 : tableau de calcul du nombre de volailles invendues mises à l’équarrissage



Annexe 3 : tableau de calcul des gains et pertes (bénéfices ou pertes) sur les ventes de volailles

